CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
14 martie 2015

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protectia mediului

CLASA A IX-A

1. Un program de calculator generează un șir de numere naturale $(t_n)_{n\geq 1}$ pe care le afișează succesiv pe ecran. Primul număr afișat este $t_1=3$ și la fiecare pas programul generează numărul următor adăgând 1 la dublul ultimului număr afișat pe ecran.

a) Aflați care este al treilea număr afișat pe ecran.

b) Demonstrați că $t_n=2^{n+1}-1$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$

c) După câți pași apare afișat pe ecran numărul 1023?

d) Arătați că t_{2015} se divide cu 3.

<u>SOLUȚIE</u>:

a) $t_1=3,\ t_2=2\cdot 3+1=7,\ t_3=2\cdot 7+1=15$

b) Demonstrăm inductiv cu $t_1=3$ și $t_{n+1}=2\cdot t_n+1$, $n\in\mathbb{N}^*$

c) $t_n=1023\ \Rightarrow\ 2^{n+1}=1024\ \Rightarrow\ n=9$

d) $t_{2015}=2^{2016}-1=4^{1008}-1=(3+1)^{1008}-1=M_3+1-1=M_3$.

<u>BAREM</u>:

a) $t_3=15$ 1p

b) $t_{n+1}=2\cdot t_n+1,\ n\in\mathbb{N}^*$ 1p

Inducție 2p

c) $n=9$ 1p

d) $t_{2015}\,\vdots\,3$ 2p

2. Fie $a, b\in\mathbb{R}$, $a\neq b$, cu care se formează ecuațiile $x^2-ax+(b-1)=0$ și $x^2-bx+(a-1)=0$.

a) Arătați că $a^2+b^2+8\geq 4(a+b)$.

b) Demonstrați că cel puțin una din aceste ecuații are rădăcini reale.

c) Există alegeri $a, b\in\mathbb{R}$ pentru care exact una din ecuațiile date să aibă rădăcini reale?

<u>SOLUȚIE</u>:

a) $a^2+b^2+8\geq 4(a+b)\ \Leftrightarrow\ (a-2)^2+(b-2)^2\geq 0$

b) $\Delta_1=a^2-4b+4$, $\Delta_2=b^2-4a+4\ \Rightarrow\ \Delta_1+\Delta_2=(a-2)^2+(b-2)^2\geq 0\ \Rightarrow$ are loc cel puțin una din situațiile $\Delta_1\geq 0$ sau $\Delta_2\geq 0$, deci cel puțin una din ecuații are rădăcini reale.

c) $a=2$, $b=1\ \Rightarrow\ x^2-2x=0$ cu rădăcini reale și $x^2-x+1=0$ care nu are rădăcini reale.

BAREM:

a) $a^2+b^2+8\geq 4(a+b) \Leftrightarrow (a-2)^2+(b-2)^2\geq 0$ 2p

b) $\Delta_1=a^2-4b+4$, $\Delta_2=b^2-4a+4$ 1p

$\Rightarrow \Delta_1+\Delta_2=(a-2)^2+(b-2)^2\geq 0$ 1p

$\Rightarrow$ are loc cel puțin una din situațiile $\Delta_1\geq 0$ sau $\Delta_2\geq 0$,

deci cel puțin una din ecuații are rădăcini reale. 1p

c) $a=2$, $b=1 \Rightarrow x^2-2x=0$ cu rădăcini reale și $x^2-x+1=0$ care nu are rădăcini reale................. 2p

3. Se consideră funcția $p:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, $p(t)=|6-2t|-|t-8|+2$. Aceasta reprezintă profitul anual al unei firme, exprimat în mii de lei, unde t este timpul măsurat în ani cu începere din momentul înființării firmei.

a) Calculați profitul firmei la finalul primului an, adică $p(1)$.

b) Arătați că firma nu înregistrează profit în primii patru ani.

c) Aflați după câți ani firma recuperează investiția inițială de 51 mii lei, determinând cel mai mic $t\in\mathbb{N}$ pentru care $p(1)+p(2)+...+p(t)\geq 51$.

SOLUȚIE:

a) $p(1)=-1$.

b) $p(2)=-2$, $p(3)=-3$, $p(4)=0$

c) $p(t)=\begin{cases}-t, & t\in[0;3)\\ 3t-12, & t\in[3;8)\\ t+4, & t\in[8;+\infty)\end{cases}$, $s(t)=p(1)+p(2)+...+p(t)$, $\Rightarrow s(10)=51$, $t=10$

BAREM:

a) $p(1)=-1$ 2p

b) $p(2)=-2$, $p(3)=-3$, $p(4)=0$ 2p

c) $p(t)=\begin{cases}-t, & t\in[0;3)\\ 3t-12, & t\in[3;8)\\ t+4, & t\in[8;+\infty)\end{cases}$ 1p

$s(t)=p(1)+p(2)+...+p(t)$, $\Rightarrow s(10)=51$, $t=10$ 2p

4. Pe o dreaptă d, pe care am fixat un sens dat de vectorul $\vec{u}$ de mărime 1, considerăm punctele $A_0, A_1, A_2, ..., A_{10}$, nu neapărat distincte și într-o ordine arbitrară, dar astfel încât $A_0A_1=1$, $A_1A_2=2$, …, $A_9A_{10}=10$.

a) Arătați că $\overrightarrow{A_kA_{k+1}}=(k+1)\vec{u}$ sau $\overrightarrow{A_kA_{k+1}}=-(k+1)\vec{u}$, pentru orice $k\in\{0,1,2,...,9\}$

b) Verificați egalitatea $\overrightarrow{A_2A_5}=\overrightarrow{A_2A_3}+\overrightarrow{A_3A_4}+\overrightarrow{A_4A_5}$.

c) Demonstrați că vectorul $\overrightarrow{A_2A_5}$ poate avea lungimea egală cu 2, 4, 6 sau 12.

d) O muscă zboară în linie dreaptă pe traseul $A_0\to A_1\to A_2\to ...\to A_{10}$. Arătați că indiferent de alegerea poziției pe dreaptă a punctelor $A_0, A_1, A_2, ..., A_{10}$, la finalul traseului musca nu ajunge în A_0.

SOLUȚIE:

a) $\left|\overrightarrow{A_k A_{k+1}}\right| = (k+1) \Rightarrow$ sau $\overrightarrow{A_k A_{k+1}} = (k+1)\vec{u}$, sau $\overrightarrow{A_k A_{k+1}} = -(k+1)\vec{u}$, pentru orice $k \in \{0,1,2,...,9\}$

b) $\overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3A_4} + \overrightarrow{A_4A_5} = \left(\overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3A_4}\right) + \overrightarrow{A_4A_5} = \overrightarrow{A_2A_4} + \overrightarrow{A_4A_5} = \overrightarrow{A_2A_5}$.

c) $\overrightarrow{A_2A_5} = \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3A_4} + \overrightarrow{A_4A_5} = \pm 3\vec{u} \pm 4\vec{u} \pm 5\vec{u} \Rightarrow \left|\overrightarrow{A_2A_5}\right| \in \left|\pm 3 \pm 4 \pm 5\right| = \{2, 4, 6, 12\}$

d) $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm ... \pm 10 =$ rezultat impar, deci la final musca nu poate ajunge în A_0.

BAREM:

a) $\left|\overrightarrow{A_k A_{k+1}}\right| = (k+1) \Rightarrow$ sau $\overrightarrow{A_k A_{k+1}} = (k+1)\vec{u}$ ………………………………………………………….. 1p

sau $\overrightarrow{A_k A_{k+1}} = -(k+1)\vec{u}$, pentru orice $k \in \{0,1,2,...,9\}$ ……………………………………………….. 1p

b) $\overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3A_4} + \overrightarrow{A_4A_5} = \left(\overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3A_4}\right) + \overrightarrow{A_4A_5} = \overrightarrow{A_2A_4} + \overrightarrow{A_4A_5} = \overrightarrow{A_2A_5}$ …………………………………… 1p

c) $\overrightarrow{A_2A_5} = \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3A_4} + \overrightarrow{A_4A_5} = \pm 3\vec{u} \pm 4\vec{u} \pm 5\vec{u}$ ………………………………………………………….. 1p

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{A_2A_5}\right| \in \left|\pm 3 \pm 4 \pm 5\right| = \{2, 4, 6, 12\}$ ………………………………………………………………… 1p

d) $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm ... \pm 10 =$ ……………………………………………………………………………….. 1p

= rezultat impar, deci la final musca nu poate ajunge în A_0. ………………………………………... 1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN IAŞI

ETAPA JUDEȚEANĂ
14 martie 2015

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protectia mediului

CLASA A X-A

1. În acestă problemă, primele două cerințe, aparent fără legătură, ajută la rezolvarea celei de-a treia.
   a) Arătați că $1<\log_2 3<2$
   b) Demonstrați inegalitatea $\dfrac{x+2}{3x}<\dfrac{2}{x+1}$, pentru orice $x\in(1;\,2)$
   c) Comparați numărul $a=\log_{27}12$ cu numărul $b=\log_6 4$.

<u>SOLUȚIE</u>:

a) $1<\log_2 3<2 \;\Leftrightarrow\; \log_2 2<\log_2 3<\log_2 4 \;\Leftrightarrow\; 2<3<4$

b) $\dfrac{x+2}{3x}<\dfrac{2}{x+1} \;\Leftrightarrow\; x^2-3x+2<0 \;\Leftrightarrow\; (x-1)(x-2)<0$ care are loc pentru orice $x\in(1;\,2)$

c) $a=\log_{27}12=\dfrac{\log_2 12}{\log_2 27}=\dfrac{\log_2 3+2}{3\log_2 3}\overset{not}{=}\dfrac{x+2}{3x}$, $b=\log_6 4=\dfrac{\log_2 4}{\log_2 6}=\dfrac{2}{1+\log_2 3}\overset{not}{=}\dfrac{2}{1+x}$, cu $\log_2 3\overset{not}{=}x\in(1;\,2)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ conform punctului anterior $a<b$

<u>BAREM:</u>

a) $1<\log_2 3<2 \;\Leftrightarrow\; \log_2 2<\log_2 3<\log_2 4$ 1p

$\Leftrightarrow\; 2<3<4$ 1p

b) $\dfrac{x+2}{3x}<\dfrac{2}{x+1} \;\Leftrightarrow\; x^2-3x+2<0$ 1p

$\Leftrightarrow\; (x-1)(x-2)<0$ care are loc pentru orice $x\in(1;\,2)$ 1p

c) $a=\log_{27}12=\dfrac{\log_2 12}{\log_2 27}=\dfrac{\log_2 3+2}{3\log_2 3}\overset{not}{=}\dfrac{x+2}{3x}$ 1p

$b=\log_6 4=\dfrac{\log_2 4}{\log_2 6}=\dfrac{2}{1+\log_2 3}\overset{not}{=}\dfrac{2}{1+x}$ 1p

cu $\log_2 3\overset{not}{=}x\in(1;\,2)$ $\Rightarrow$ conform punctului anterior $a<b$ 1p

2. Considerăm numărul complex $z=1-i\sqrt{3}$.

   a) Arătați că numărul $\frac{z}{|z|}+\frac{|z|}{z}$ este real.

   b) Determinați $a, b\in\mathbb{R}$ astfel încât $z^2=az+b$.

   c) Arătați că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ există $a_n, b_n\in\mathbb{R}$ astfel încât $z^n=a_n z+b_n$.

<u>SOLUȚIE</u>:

a) $\frac{z}{|z|}+\frac{|z|}{z}=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}+\frac{2}{1-i\sqrt{3}}=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}+\frac{1+i\sqrt{3}}{2}=1\in\mathbb{R}$

b) $z^2=az+b \Leftrightarrow \left(1-i\sqrt{3}\right)^2=a\left(1-i\sqrt{3}\right)+b \Leftrightarrow -2-2i\sqrt{3}=(a+b)-ai\sqrt{3} \Rightarrow a=2,\ b=-4$

c) Inducție, $a_1=1$, $b_1=0$, $z^k=a_k z+b_k \Rightarrow$

$\Rightarrow z^{k+1}=a_k z^2+b_k z=a_k(2z-4)+b_k z=(2a_k+b_k)z-4a_k=a_{k+1}z+b_{k+1}$,

unde $a_{k+1}=2a_k+b_k\in\mathbb{R}$, $b_{k+1}=-4a_k\in\mathbb{R}$

<u>BAREM</u>:

a) $\frac{z}{\overline{z}}+\frac{\overline{z}}{z}=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}+\frac{2}{1-i\sqrt{3}}$ 1p

$=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}+\frac{1+i\sqrt{3}}{2}=1\in\mathbb{R}$ 1p

b) $z^2=az+b \Leftrightarrow \left(1-i\sqrt{3}\right)^2=a\left(1-i\sqrt{3}\right)+b \Leftrightarrow -2-2i\sqrt{3}=(a+b)-ai\sqrt{3}$ 1p

$\Rightarrow a=2,\ b=-4$ 1p

c) Inducție, $a_1=1$, $b_1=0$ 1p

$z^k=a_k z+b_k \Rightarrow$

$\Rightarrow z^{k+1}=a_k z^2+b_k z=a_k(2z-4)+b_k z=(2a_k+b_k)z-4a_k=a_{k+1}z+b_{k+1}$, $a_{k+1}\in\mathbb{R}$, $b_{k+1}\in\mathbb{R}$ 2p

3. Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2^x+2^{2-x}$.

   a) Arătați că $f(x_1)-f(x_2)=\left(2^{x_1}-2^{x_2}\right)\cdot\left(1-2^{2-x_1-x_2}\right)$, oricare ar fi $x_1, x_2\in\mathbb{R}$.

   b) Demonstrați că funcția f este descrescătoare pe $(-\infty; 1]$ și crescătoare pe $[1; +\infty)$.

   c) Arătați că $f(x)+f\left(x^2\right)\geq 12{,}5$, pentru orice $(-\infty;-1]$.

<u>SOLUȚIE</u>:

a) $\left(2^{x_1}-2^{x_2}\right)\cdot\left(1-2^{2-x_1-x_2}\right)=\ldots=f(x_1)-f(x_2)$

b) Dacă $x_1<x_2\leq 1 \Rightarrow 2^{x_1}-2^{x_2}<0$ și $1-2^{2-x_1-x_2}\leq 0 \Rightarrow f(x_1)-f(x_2)\geq 0 \Rightarrow f$ descrescătoare pe $(-\infty; 1]$.

Dacă $1\leq x_1<x_2 \Rightarrow 2^{x_1}-2^{x_2}<0$ și $1-2^{2-x_1-x_2}\geq 0 \Rightarrow f(x_1)-f(x_2)\leq 0 \Rightarrow f$ crescătoare pe $[1; +\infty)$.

c) f descrescătoare pe $(-\infty; -1] \Rightarrow f(x)\geq f(-1)=8{,}5$

$x\in(-\infty; -1] \Rightarrow x^2\in[1; +\infty)$, f crescătoare pe $[1; +\infty) \Rightarrow f\left(x^2\right)\geq f(1)=4$

$\Rightarrow f(x)+f\left(x^2\right)\geq 12{,}5$

BAREM:

a) $\left(2^{x_1}-2^{x_2}\right)\cdot\left(1-2^{2-x_1-x_2}\right)=...=f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)$ 2p

b) Dacă $x_1<x_2\leq 1 \Rightarrow 2^{x_1}-2^{x_2}<0$ și $1-2^{2-x_1-x_2}\leq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\geq 0 \Rightarrow f$ descrescătoare pe $\left(-\infty;1\right]$. 1p

Dacă $1\leq x_1<x_2 \Rightarrow 2^{x_1}-2^{x_2}<0$ și $1-2^{2-x_1-x_2}\geq 0 \Rightarrow$

$f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\leq 0 \Rightarrow f$ crescătoare pe $\left[1;+\infty\right)$. 1p

c) f descrescătoare pe $\left(-\infty;-1\right] \Rightarrow f\left(x\right)\geq f\left(-1\right)=8{,}5$ 1p

$x\in\left(-\infty;-1\right] \Rightarrow x^2\in\left[1;+\infty\right)$, f crescătoare pe $\left[1;+\infty\right) \Rightarrow f\left(x^2\right)\geq f\left(1\right)=4$ 1p

$\Rightarrow f\left(x\right)+f\left(x^2\right)\geq 12{,}5$ 1p

4. O mulțime de numere naturale o vom numi *specială* dacă are cel puțin trei elemente și suma oricăror două elemente ale ei se divide cu 6.

a) Arătați că mulțimea $\{12, 18, 24\}$ este specială.

b) Dați exemplu de o mulțime specială cu patru elemente și care să conțină elementul 3.

c) Fie $A\subset\{1, 2, 3, ...,100\}$ o mulțime specială.

c_1 : Arătați că elementele mulțimii A fie sunt toate divizibile cu 6, fie la împărțirea cu 6 dau toate restul 3

c_2 : Aflați care este numărul maxim de elemente al mulțimii A

SOLUȚIE:

a) $30=6\cdot 5\Rightarrow 30\,\vdots\,6$, $36=6\cdot 6\Rightarrow 36\,\vdots\,6$, $42=6\cdot 7\Rightarrow 42\,\vdots\,6$, deci $\{12, 18, 24\}$ este specială

b) spre exemplu $\{3, 9, 15, 21\}$ este specială

c) c_1 : Dacă $a, b\in A$, $x\in A \Rightarrow a-b=\left(a+x\right)-\left(b+x\right)\,\vdots\,6$

Din $a+b=M_6$ și $a-b=M_6 \Rightarrow 2a=M_6 \Rightarrow$ sau $a=M_6$ sau $a=M_6+3$

c_2 : Conform cu c_1, sau $A=\{3, 9, 15,...,99\}$ sau $A=\{6, 12, 18,...,96\}$

și numărul maxim de elemente este 17, atunci când $A=\{3, 9, 15,...,99\}$

BAREM:

a) $30=6\cdot 5\Rightarrow 30\,\vdots\,6$, $36=6\cdot 6\Rightarrow 36\,\vdots\,6$, $42=6\cdot 7\Rightarrow 42\,\vdots\,6$, deci $\{12, 18, 24\}$ este specială 1p

b) spre exemplu $\{3, 9, 15, 21\}$ este specială 2p

c) c_1 : Dacă $a, b\in A$, $x\in A \Rightarrow a-b=\left(a+x\right)-\left(b+x\right)\,\vdots\,6$ 1p

Din $a+b=M_6$ și $a-b=M_6 \Rightarrow 2a=M_6 \Rightarrow$ sau $a=M_6$ sau $a=M_6+3$ 2p

c_2 : Conform cu c_1, sau $A=\{3, 9, 15,...,99\}$ sau $A=\{6, 12, 18,...,96\}$

și numărul maxim de elemente este 17, atunci când $A=\{3, 9, 15,...,99\}$ 1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
14 martie 2015

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protectia mediului

CLASA A XI-A

1. Considerăm matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ care apare afișată pe monitorul unui calculator.

a) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\det(A+xI_3)=0$.

b) Găsiți $n\in\mathbb{N}$ pentru care suma elementelor matricei A^n este egală cu 1025.

c) Printr-un program, la un prim pas, elementele unei linii oarecare ale matricei A sunt mărite cu 1 și noua matrice obținută în acest mod înlocuiește matricea A afișată inițial pe monitorul calculatorului. Procesul se repetă în mod automat cu elementele unei linii oarecare, aceeași sau oricare din celelalte două, din noua matrice afișată pe monitor și se reia de atâtea ori de câte ori a fost comandat de către programator. Aflați câți pași trebuie să comande programatorul pentru ca pe monitor să apară la final o matrice cu suma tuturor elementelor egală cu 2015.

<u>SOLUȚIE</u>:

a) $\det(A+xI_3)=\begin{vmatrix}1+x & 0 & 1\\ 0 & 1+x & 0\\ 1 & 0 & 1+x\end{vmatrix}=(1+x)^3-(1+x)\ \Rightarrow\ (1+x)^3-(1+x)=0\ \Rightarrow\ x\in\{-2,\,-1,\,0\}$

b) Inductiv $A^n=\begin{pmatrix}2^{n-1} & 0 & 2^{n-1}\\ 0 & 1 & 0\\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1}\end{pmatrix}$ și se obține ecuația $4\cdot 2^{n-1}+1=1025$ cu soluția $n=9$.

c) La fiecare pas suma elementelor noii matrice este cu 3 mai mare decât suma elementelor matricei anterioare, obținând astfel $5+3n=2015$, deci $n=670$

<u>BAREM</u>:

a) $\det(A+xI_3)=\begin{vmatrix}1+x & 0 & 1\\ 0 & 1+x & 0\\ 1 & 0 & 1+x\end{vmatrix}=(1+x)^3-(1+x)$ 1p

$\Rightarrow\ (1+x)^3-(1+x)=0\ \Rightarrow\ x\in\{-2,\,-1,\,0\}$ 1p

b) Calculează A^2 .... 1p

Demonstrează $A^n=\begin{pmatrix}2^{n-1} & 0 & 2^{n-1}\\ 0 & 1 & 0\\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1}\end{pmatrix}$ 1p

și se obține ecuația $4\cdot 2^{n-1}+1=1025$ cu soluția $n=9$. 1p

c) La fiecare pas suma elementelor noii matrice crește cu 3 .... 1p

obținând astfel $5+3n=2015$, deci $n=670$ 1p

2. Fie funcția $f:(1;+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+\ln(x+1)-\ln(x-1)$.

a) Determinați ecuațiile asimptotelor la graficul funcției.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(f(x)-2x\right)$.

c) Arătați că există $x_0\in(1;+\infty)$ astfel încât $f(x_0+2015)=f(x_0)+2015$

<u>SOLUȚIE</u>:

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=+\infty$, deci $x=1$ este asimptotă verticală

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(2x+\ln\dfrac{x+1}{x-1}\right)=+\infty$, deci graficul nu are asimptotă orizontală

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=...=2$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-2x\right)=...=0$, deci $y=2x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(f(x)-2x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\ln\dfrac{x+1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x=...=\ln e^2=2$

c) Considerăm funcția continuă $g:(1;+\infty)\to\mathbb{R}$,

$g(x)=f(x+2015)-f(x)-2015=2015+\ln\left(\dfrac{x+2016}{x+2014}\cdot\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

Cum $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} g(x)=-\infty$ și $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=2015$, există $x_0\in(1;+\infty)$ cu $g(x_0)=0$.

<u>BAREM</u>:

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=+\infty$, deci $x=1$ este asimptotă verticală 1p

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(2x+\ln\dfrac{x+1}{x-1}\right)=+\infty$, deci graficul nu are asimptotă orizontală 1p

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=...=2$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-2x\right)=...=0$, deci $y=2x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ 1p

b) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(f(x)-2x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\ln\dfrac{x+1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$ 1p

$=...=\ln e^2=2$ 1p

c) Considerăm funcția continuă $g:(1;+\infty)\to\mathbb{R}$,

$g(x)=f(x+2015)-f(x)-2015=2015+\ln\left(\dfrac{x+2016}{x+2014}\cdot\dfrac{x-1}{x+1}\right)$ 1p

Cum $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} g(x)=-\infty$ și $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=2015$, există $x_0\in(1;+\infty)$ cu $g(x_0)=0$. 1p

3. Numim mulțime a codurilor de lungime 9 mulțimea M a tuturor matricelor de tip 3×3 care au ca elemente cifrele 1 sau 2, fiecare cifră fiind prezentă cel puțin o dată.

a) Determinați numărul codurilor mulțimii M.

b) Arătați că există coduri $X\in M$ cu $\det X=0$ și coduri $Y\in M$ cu $\det Y\neq 0$.

c) Cercetați dacă există coduri $Z\in M$ inversabile și cu $Z^{-1}\in M$.

SOLUȚIE:

a) Fiecare element al unei matrice din M poate fi ales sau 1 sau 2. Cum matricele formate numai cu 1 sau numai cu 2 nu sunt coduri, înseamnă că avem exact $2^9-2=510$ coduri.

b) De exemplu, $X=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\2&2&2\end{pmatrix}$, $\det X=0$ și $Y=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$, $\det Y=4\neq 0$.

c) Fie un cod $Z=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$, $\det Z\neq 0$ și $Z^{-1}=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}$ tot cod.

Cum $Z\cdot Z^{-1}=I_3 \Rightarrow a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}=1$, fals deoarece $a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}\geq 3$, deci nu există coduri cu proprietatea cerută.

BAREM:

a) Fiecare element al unei matrice din M poate fi ales sau 1 sau 2. Cum matricele formate numai cu 1 sau numai cu 2 nu sunt coduri, înseamnă că avem exact $2^9-2=510$ coduri………………………………………. 2p

b) De exemplu, $X=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\2&2&2\end{pmatrix}$, $\det X=0$ ………………………………………………………….. 1p

și $Y=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$, $\det Y=4\neq 0$ ………………………………………………………………………. 2p

c) Fie un cod $Z=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$, $\det Z\neq 0$ și $Z^{-1}=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}$ tot cod.

Cum $Z\cdot Z^{-1}=I_3$ ……………………………………………………………………………………. 1p

$\Rightarrow a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}=1$,

fals deoarece $a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}\geq 3$, deci nu există coduri cu proprietatea cerută………………………. 1p

4. Fie $a, b, c\in\mathbb{R}$, $a>1$ și $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=c$, care pentru orice $x\in\mathbb{R}$ verifică $f(ax)-af(x)=bx^2$.

a) Calculați $f(0)$.

b) Arătați că $f(x)=a^n f\left(\dfrac{x}{a^n}\right)+\dfrac{bx^2}{a(a-1)}\left(1-\dfrac{1}{a^n}\right)$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$ și $n\in\mathbb{N}$.

c) Determinați funcția f.

SOLUȚIE:

a) $f(ax)-af(x)=bx^2 \Rightarrow f(0)-af(0)=0 \quad f(0)=0$

b) $n=1 \Rightarrow f(x)=af\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{bx^2}{a(a-1)}\left(1-\frac{1}{a}\right),\ (\forall)x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow f(ax)=af(x)+bx^2$.

Presupunând relația adevărată pentru $k\in\mathbb{N}$, obținem

$$f(x)=a\cdot f\left(\frac{x}{a}\right)+b\cdot\frac{x^2}{a^2}=a\cdot\left[a^k f\left(\frac{x}{a^{k+1}}\right)+\frac{bx^2}{a^3(a-1)}\left(1-\frac{1}{a^k}\right)\right]+b\cdot\frac{x^2}{a^2}=$$

$$=a^{k+1}f\left(\frac{x}{a^{k+1}}\right)+\frac{bx^2}{a^2(a-1)}\left(1-\frac{1}{a^k}+a-1\right)=a^{k+1}f\left(\frac{x}{a^{k+1}}\right)+\frac{bx^2}{a(a-1)}\left(1-\frac{1}{a^{k+1}}\right)$$

c) Cum $\lim\limits_{n\to\infty}a^n f\left(\frac{x}{a^n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{x}{a^n}\right)}{\frac{x}{a^n}}\cdot x=cx,\ x\neq 0$ și $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{a^n}\right)=1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x)=\lim_{n\to\infty}\left[a^n f\left(\frac{x}{a^n}\right)+\frac{bx^2}{a(a-1)}\left(1-\frac{1}{a^n}\right)\right]=cx+\frac{bx^2}{a(a-1)},\ x\neq 0$$

și cum $f(0)=0 \Rightarrow f(x)=cx+\frac{bx^2}{a(a-1)},\ (\forall)\ x\in\mathbb{R}$

BAREM:

a) $f(ax)-af(x)=bx^2 \Rightarrow f(0)-af(0)=0 \quad f(0)=0$ 1p

b) $n=1 \Rightarrow f(x)=af\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{bx^2}{a(a-1)}\left(1-\frac{1}{a}\right),\ (\forall)x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow f(ax)=af(x)+bx^2$ 1p

Presupunând relația adevărată pentru $k\in\mathbb{N}$, obținem

$$f(x)=a\cdot f\left(\frac{x}{a}\right)+b\cdot\frac{x^2}{a^2}=a\cdot\left[a^k f\left(\frac{x}{a^{k+1}}\right)+\frac{bx^2}{a^3(a-1)}\left(1-\frac{1}{a^k}\right)\right]+b\cdot\frac{x^2}{a^2}=$$

$=a^{k+1}f\left(\frac{x}{a^{k+1}}\right)+\frac{bx^2}{a^2(a-1)}\left(1-\frac{1}{a^k}+a-1\right)=a^{k+1}f\left(\frac{x}{a^{k+1}}\right)+\frac{bx^2}{a(a-1)}\left(1-\frac{1}{a^{k+1}}\right)$ 2p

c) Cum $\lim\limits_{n\to\infty}a^n f\left(\frac{x}{a^n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{x}{a^n}\right)}{\frac{x}{a^n}}\cdot x=cx,\ x\neq 0$ 1p

și $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{a^n}\right)=1 \Rightarrow$ 1p

$$\Rightarrow f(x)=\lim_{n\to\infty}\left[a^n f\left(\frac{x}{a^n}\right)+\frac{bx^2}{a(a-1)}\left(1-\frac{1}{a^n}\right)\right]=cx+\frac{bx^2}{a(a-1)},\ x\neq 0$$

și cum $f(0)=0 \Rightarrow f(x)=cx+\frac{bx^2}{a(a-1)},\ (\forall)\ x\in\mathbb{R}$ 1p